SYMMETRIES IN ELEMENTARY PARTICLE PHYSICS
Part 1. Space–time symmetries

I. V. TYUTIN

The Newtonian laws and the possible forms of physical characteristics which depend only on velocity of a body are considered on the basis of space–time uniformity and isotropy considerations. The impossibility of simple generalizations of the space–time symmetries is discussed.

На основании соображений об однородности и изотропности пространства–времени рассмотрены законы Ньютона, а также возможный вид физических характеристик движущегося тела, зависящих только от скорости. Обсуждается невозможность простых обобщений пространственно-временных симметрий.

СИММЕТРИЯ В ФИЗИКЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Часть 1. Пространственно-временные симметрии

И. В. ТЮТИН

Московский физико-технический институт

1. ВВЕДЕНИЕ

Один из важнейших разделов физики – теория элементарных частиц – занимается изучением свойств пространства и времени и взаимодействий элементарных частиц. Элементарные частицы – это простейшие известные в настоящее время (или гипотетические) объекты, из которых строятся более сложные объекты и, в конце концов, атомы, молекулы, вещество. В начале нашего столетия такими элементарными объектами были электрон и ядро, составлявшие атом, потом было обнаружено, что ядро состоит из протонов и нейтронов, а свет также есть поток частиц – фотонов. Сейчас мы знаем, что протоны и нейтроны также являются составными объектами: они состоят из кварков и глюонов. Задача построения теории (законов “движения”) этого многообразного и трудно наблюдаемого мира элементарных объектов чрезвычайно сложна и пока еще не решена. Отдельные блоки такой теории считаются построенными. В 1948 году была создана современная теория электромагнитного взаимодействия (Томонага, Фейнман, Швингер), а в конце семидесятых – начале восьмидесятых годов – единая теория слабого и электромагнитного взаимодействий (электрослабая теория, Вейнберг, Глэшоу, Салам).

Одним из руководящих принципов при построении теории электрослабого взаимодействия является требование симметрии, так называемой калибровочной симметрии. Представление о симметрии физических законов возникло со времен Галилея и Ньютона, которые сформулировали постулат об эквивалентности всех инерциальных систем отсчета. Однако понимание того, что симметрия должна быть одним из требований при формулировке физических теорий, появилось в 1905 году после работ Пуанкаре, который установил инвариантность уравнений Максвелла относительно преобразований координат, названных им преобразованиями Лоренца, и работ Эйнштейна, установившего физический смысл этой инвариантности как внутреннего свойства пространства–времени. С тех пор принципы симметрии стали играть в физике все возрастающую роль и в настоящее время являются главными при построении физических теорий.

2. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ СИММЕТРИИ

Хорошо известны такие свойства пространства, как однородность и изотропность. Однородность пространства означает, что физические явления протекают одинаково в двух системах координат, сдвинутых параллельно друг относительно друга. Изотропность означает, что физические явления протекают одинаково в двух системах координат, повернутых одна относительно другой около любой оси. Равным образом можно сказать, что если мы перенесем физическую систему в другое место или повернем ее как целое, то при сохранении внешних условий она этого не почувствует. Мы покажем, каким образом можно получать нетривиальные следствия этих, на первый взгляд простых и естественных, предположений, а также обсудим возможность (точнее говоря, невозможность) обобщения свойств однородности и изотропности пространства.

2.1. Симметрия и законы Ньютона

Рассмотрим два тела A и B с координатами $\mathbf{r}_A = (x_A, y_A, z_A)$ и $\mathbf{r}_B = (x_B, y_B, z_B)$. Предположим, что сила $\mathbf{F}_{BA}$, с которой тело A действует на тело B, зависит только от положений тел A и B (но не зависит от скоростей тел и т.п.):

$$\mathbf{F}_{BA} = \mathbf{F}_{BA}(\mathbf{r}_B, \mathbf{r}_A)$$

Удобно рассматривать $\mathbf{F}_{BA}$ как функции их относительных и средних координат $\mathbf{r} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$ и $\mathbf{R} = 0{,}5(\mathbf{r}_B + \mathbf{r}_A)$:

$$\mathbf{F}_{BA} = \mathbf{F}_{BA}\left(\mathbf{R} + \frac{1}{2}\mathbf{r}, \mathbf{R} - \frac{1}{2}\mathbf{r}\right) \equiv \mathbf{f}_{BA}(\mathbf{r}, \mathbf{R}).$$

Выполним перенос системы координат на вектор $\mathbf{a}$, так что в новой системе координат положения тел будут задаваться следующим образом:

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_A + \mathbf{a}, \quad \mathbf{r}_B = \mathbf{r}_B + \mathbf{a}, \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r}, \quad \mathbf{R}' = \mathbf{R} + \mathbf{a}.$$

Предположение о трансляционной симметрии системы означает, что от переноса начала системы координат сила, с которой тело A действует на тело B, не изменится:

$$\mathbf{f}_{BA}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \mathbf{f}_{BA}(\mathbf{r}', \mathbf{R}') = \mathbf{f}_{BA}(\mathbf{r}, \mathbf{R} + \mathbf{a}).$$

Поскольку вектор $\mathbf{a}$ произволен, мы приходим к выводу о том, что функции $\mathbf{f}_{BA}(\mathbf{r}, \mathbf{R})$ не зависят от второй группы аргументов: $\mathbf{f}_{BA} = \mathbf{f}_{BA}(\mathbf{r})$, то есть сила, с которой тело A действует на тело B, зависит только от относительного расположения тел A и B.

Выполним теперь поворот системы координат вокруг оси, проходящей через тела A и B. Так как в повернутых координатах система тел выглядит точно так же, как и в исходных, направление силы $\mathbf{F}_{BA}$ относительно новой системы координат должно быть таким же, как и относительно старой системы координат, то есть сила должна повернуться вместе с поворотом системы координат. Фактическое направление силы не зависит от поворотов системы координат, это означает, что сила $\mathbf{F}_{BA}$ направлена вдоль линии, соединяющей тела A и B. Пусть тело A находится в начале системы координат, а тело B – в некоторой точке $\mathbf{r}$. Выполним поворот системы координат. В новой системе координат тело B будет находиться в некоторой точке $\mathbf{r}'$, причем длины векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ равны. При этом силы, действующие на тело B в одной и другой системах координат, очевидно, равны. По-другому можно сказать, что если с помощью поворотов тело B из точки $\mathbf{r}$ можно перевести в точку $\mathbf{r}'$, то сила $\mathbf{f}_{BA}(\mathbf{r}')$, действующая на тело B в точке $\mathbf{r}'$, получается с помощью этих же поворотов из силы $\mathbf{f}_{BA}(\mathbf{r})$. В частности, величины этих сил равны. Поскольку любые две точки, находящиеся на одинаковом расстоянии от центра, можно перевести друг в друга поворотами, это означает, что величина силы зависит только от расстояния между телами A и B:

$$\mathbf{F}_{BA} = f_{BA}(r)\mathbf{n}, \qquad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}, \tag{1}$$

и по величине сила $F_{BA} = |f_{BA}(r)|$. Аналогично сила $\mathbf{F}_{AB}$, с которой тело B действует на тело A, также направлена вдоль линии, соединяющей тела A и B, а по величине зависит только от расстояния между этими телами: $\mathbf{F}_{AB} = -f_{AB}(r)\mathbf{n}$.

Пусть тело A снова находится в начале координат и ось x проходит через тело B. Выполним малое перемещение тела A вдоль оси x на расстояние Δx при неподвижном теле B. При этом будет совершена работа $F_{AB}\Delta x\cos\theta_{AB}$, где угол θ_{AB} равен нулю, если сила $\mathbf{F}_{AB}$ и перемещение направлены одинаково, и равен π, если $\mathbf{F}_{AB}$ и перемещение направлены противоположным образом. Сделаем сдвиг системы координат вдоль оси x так, чтобы начало координат новой системы совпадало с новым положением тела A. В новой системе координат положение тел выглядит так, как если бы тело B переместили на расстояние $-\Delta x$ при неподвижном теле A. При этом будет совершена работа $F_{BA}\Delta x\cos\theta_{BA}$, где угол θ_{BA} равен нулю или π в зависимости от того, совпадают направления силы $\mathbf{F}_{AB}$ и перемещения тела B или они противоположны. Приравнивая эти выражения, получаем $F_{BA}\cos\theta_{BA} = F_{AB}\cos\theta_{AB}$, откуда следует $F_{BA} = F_{AB}$, $\theta_{BA} = \theta_{AB}$. Тем самым мы установили третий закон Ньютона:

$$\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA}.$$

Силы, определяемые выражением (1), называются центральными. Центральные силы обладают важными свойствами. Для них можно ввести понятие потенциальной энергии, и они сохраняют угловой момент.

Можно привести ряд других примеров, когда соображения симметрии позволяют простым образом получить значительную информацию о системе. Так, соображения симметрии позволяют установить, что сила, действующая на пробное тело (заряд) со стороны другого тела (заряда) со сферически-симметричным распределением массы (заряда), является центральной. Сила, действующая на пробное тело (заряд) со стороны бесконечной плоскости с постоянной плотностью массы (заряда), перпендикулярна плоскости и по величине зависит только от расстояния от плоскости до пробного тела и т.п.

2.2. Симметрия и кинетическая энергия

Обсудим вид физических характеристик тела, которые зависят только от его скорости и являются многочленами по компонентам скорости. Критерием является требование, чтобы физическая величина "хорошо" преобразовывалась при переходе (поворотах) от одной системы координат к другой. Под "хорошими" трансформационными свойствами мы будем понимать следующее: физическая характеристика либо должна преобразовываться как скорость (такие величины мы будем обозначать $\mathbf{p}(\mathbf{v})$), либо вообще не должна преобразовываться (такие величины называются инвариантами преобразований; мы будем обозначать их $E(\mathbf{v})$). Таким образом, мы требуем следующих трансформационных свойств физических величин. Пусть при повороте радиус-вектор преобразуется по правилу

$$r_i \longrightarrow r'_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} r_j + a_i.$$

Тогда разности радиус-векторов $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, а следовательно, и скорости $\mathbf{v} = \Delta\mathbf{r}/\Delta t$ преобразуются по правилу

$$\Delta r'_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}\Delta r_j, \qquad \upsilon'_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}\upsilon_j.$$

Величины $\mathbf{p}(\mathbf{v})$ и $E(\mathbf{v})$ должны преобразовываться следующим образом:

$$p_i(\mathbf{v}') = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} p_j(\mathbf{v}), \qquad E(\mathbf{v}') = E(\mathbf{v}). \qquad (2)$$

(a) **Величины, линейные по компонентам скорости.** Рассматривая поочередно повороты вокруг осей x, y, z и используя равенства (2), убеждаемся, что величин типа E, линейных по скорости, не существует и имеется только одна характеристика типа $\mathbf{p}$: $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, где m – числовой параметр. В механике Ньютона эта величина совпадает с импульсом частицы.

(b) **Величины, квадратичные по компонентам скорости.** В этом случае отсутствуют величины типа $\mathbf{p}$ и имеется только одна величина типа E: $E = (a/2)(\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2) \equiv (a/2)\upsilon^2$, a – произвольный числовой параметр. В механике Ньютона эта величина называется кинетической энергией (после отождествления a и m).

Таким образом видно, что привлечение соображений симметрии существенно ограничивает возможный вид физических характеристик движения тела.

(c) **Величины, не четные по компонентам скорости.** В этих случаях величины типа E отсутствуют, а величины типа p имеют вид $\mathbf{p} = f(\upsilon^2)\mathbf{v}$, где $f(x)$ – произвольная функция одного аргумента.

(d) **Величины, четные по компонентам скорости.** В этих случаях отсутствуют величины типа $\mathbf{p}$, а величины типа E имеют вид $E = \varphi(\upsilon^2)$, где $\varphi(x)$ – произвольная функция одного аргумента.

Мы знаем, что при больших скоростях выражения ньютоновской механики для кинетической энергии и импульса должны быть модифицированы. При каких условиях такая модификация возможна? Ограничимся анализом выражения для кинетической энергии. Следующее по сложности после ньютоновского выражение для кинетической энергии имеет вид $E = (a/2)\upsilon^2 + b(\upsilon^2)^2 = (a/2)\upsilon^2(1 + \upsilon^2/c^2)$, где для определенности a и b – положительные константы, $c^2 \equiv a/2b$. Константа c имеет размерность скорости! Глядя на это выражение, можно сказать следующее. Если ньютоновское выражение для кинетической энергии должно быть изменено, тогда в природе должна существовать фундаментальная скорость c. При скоростях тел υ, много меньших фундаментальной скорости, справедливы выражения ньютоновской механики и вообще сама ньютоновская механика. Когда же скорости тел приближаются к фундаментальной скорости, следует ожидать отклонения от ньютоновской механики. Если же дополнительно предположить, что наличие фундаментальной скорости является законом природы и, таким образом, эта скорость одинакова во всех инерциальных системах отсчета, мы приходим к специальной теории относительности. Как мы на самом деле знаем, такая фундаментальная скорость действительно существует и она совпадает со скоростью света в вакууме.

Здесь мы вновь убеждаемся в исключительно важной и полезной роли соображений симметрии.

2.3. Попытки обобщения

Нельзя ли расширить множество преобразований симметрии, включив в них, кроме поворотов и отражений, еще какие-нибудь преобразования? Иными словами, мы ставим следующую задачу. Каков общий вид линейных преобразований $\mathbf{r} \longrightarrow \mathbf{r}'$:

$$r'_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} r_j, \qquad (3)$$

сохраняющих длины векторов: $x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2$? Оказывается, такие преобразования исчерпываются поворотами и отражениями. Очень просто это увидеть, если преобразуются только две координаты: $x' = a_{11}x + a_{12}y$, $y' = a_{21}x + a_{22}y$, $z' = z$, $(a_{11}x + a_{12}y)^2 + (a_{21}x + a_{22}y)^2 = x^2 + y^2$, откуда $a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1$, $a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1$ $a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0$. Из первых двух уравнений следует, что $a_{11} = \cos\varphi$, $a_{21} = \sin\varphi$, $a_{12} = \cos\psi$, $a_{22} = \sin\psi$. Последнее из уравнений переписывается в виде $\sin(\varphi + \psi) = 0$, что дает $\psi = -\varphi$ или $\psi = -\varphi + \pi$ (остальные решения эквивалентны приведенным выше). В первом случае получаем

$$x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi, \quad y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi, \quad z' = z,$$

что представляет собой поворот вокруг оси z на угол φ. Во втором случае имеем

$$x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi, \quad y' = -(-x\sin\varphi + y\cos\varphi), \quad z' = z,$$

что представляет собой поворот вокруг оси z на угол φ и последующее отражение оси y. Нетрудно также проанализировать случай, когда преобразования мало отличаются от тождественного. Это означает, что преобразования имеют вид

$$a_{ij} = \delta_{ij} + \alpha_{ij} \qquad r'_i = r_i + \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij} r_j,$$

где $\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ij} = 0$, $i \neq j$, причем параметры α_{ij} являются малыми в том смысле, что величинами α_{ij}^2 можно пренебречь по сравнению с α_{ij}. Условие сохранения длин векторов дает $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} = 0$, или $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = 0$, $\alpha_{12} = -\alpha_{21} \equiv \varphi_z$, $\alpha_{13} = -\alpha_{31} \equiv -\varphi_y$, $\alpha_{23} = -\alpha_{32} \equiv \varphi_x$. Соответствующие преобразования имеют вид

$$x' = x + y\varphi_z - z\varphi_y, \quad y' = y - x\varphi_z + z\varphi_x, \quad z' = z + x\varphi_y - y\varphi_x$$

и представляют собой совокупность вращений около осей x, y, z на малые углы φ_x, φ_y, φ_z (при сравнении с точной формулой преобразования координат при поворотах вокруг осей следует учесть, что $\cos\varphi \approx \approx 1 - \varphi^2/2 \approx 1$, $\sin\varphi \approx \varphi$ при малых углах φ).

Общий случай несколько более сложен для анализа, однако он вполне доступен школьникам. Условие сохранения длин векторов дает

$$\sum_{k=1}^{3} a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij}.$$

Это уравнение можно решить в общем случае и получить для параметров a_{ij} представление

$$a_{ij} = \alpha\left(\cos\varphi\delta_{ij} + 2\sin^2\frac{\varphi}{2} m_i m_j + \sin\varphi \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} m_k\right),$$

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = -\varepsilon_{213} = -\varepsilon_{132} = -\varepsilon_{321} = 1,$$

$$\varepsilon_{ijk} = 0, \text{ если}$$

$$\text{либо } i = j, \text{ либо } i = k, \text{ либо } j = k, \text{ либо } i = j = k,$$

вектор $\mathbf{m}$ – произвольный вектор единичной длины, φ – произвольное число, $\alpha = \pm 1$. Из этого выражения видно, что преобразование представляет собой поворот вокруг вектора $\mathbf{m}$ на угол φ, дополненный (при $\alpha = -1$) отражением относительно начала координат. Можно также дать геометрическое доказательство, основанное на том факте, что преобразования, сохраняющие длины векторов, сохраняют также углы между векторами и переводят прямую в прямую, плоскость в плоскость. В более общем случае преобразований

$$r'_i = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} r_k + a_i,$$

сохраняющих расстояния между любыми двумя точками, можно проверить, что их можно представить как суперпозицию отражения относительно начала координат, поворота вокруг некоторой оси (не обязательно проходящей через начало координат) и сдвига вдоль этой же оси. Можно пойти еще дальше и допустить произвольное преобразование координат (новые координаты являются произвольными, не обязательно линейными, функциями старых координат), однако расстояние между близкими точками в новой системе координат по-прежнему вычислять по теореме Пифагора. И в этом случае оказывается, что допустимые преобразования состоят только из сдвигов, поворотов и отражений всего пространства как целого. Доказательство этого факта требует, однако, знания основ дифференциального исчисления в частных производных.

Проведенное рассмотрение показывает, что симметрия устойчива относительно попыток ее модификаций. Только радикальное изменение свойств физической системы может привести к изменению свойств ее симметрии. Симметрию следует рассматривать как одно из главных внутренних свойств физической системы.

3. СИММЕТРИИ ПРОСТРАНСТВА–ВРЕМЕНИ

Если мы пришли к мысли о том, что время – это еще одна переменная типа координаты, естественно пойти дальше и считать, что единое четырехмерное пространство–время также обладает свойством, аналогичным свойству однородности и изотропности обычного пространства. Как выглядят соответствующие преобразования координат и времени? Оказывается, их вид определяется постулатом Эйнштейна, согласно которому скорость света в вакууме одинакова во всех инерциальных системах отсчета. Этот постулат позволяет полностью установить вид преобразований.

3.1. Вид преобразований пространства–времени

Предположим, что преобразования состоят из сдвигов и линейных преобразований координат:

$$x'_\mu = \sum_{\nu=0}^{3} a_{\mu\nu} x_\nu + a_\mu, \tag{4}$$

где μ, $\nu = 0, 1, 2, 3$, $x_0 = t$ – временная координата, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ – пространственные координаты, $a_{\mu\nu}$ и a_μ – некоторые числа.

Сдвиг координат x_μ на a_μ есть сдвиг начала пространственной системы координат на вектор $\mathbf{a} = = (a_1, a_2, a_3)$ и изменение начала отсчета времени (перевод часов) на величину a_0. При таких преобразованиях скорость света будет одной и той же в разных системах координат.

Перейдем к линейным преобразованиям. Если преобразования не затрагивают время, то есть преобразуются только пространственные координаты друг через друга, то для постоянства скорости света в разных системах координат необходимо, чтобы преобразования сохраняли длины векторов. Как мы видели, такие преобразования состоят из вращений и отражений. Пусть теперь преобразование таково, что координаты y и z не меняются, а преобразуются друг через друга только t и x:

$$t' = a_{00}t + a_{01}x, \quad x' = a_{10}t + a_{11}x, \quad y' = y, \quad z' = z. \quad (5)$$

Для существования обратного преобразования необходимо и достаточно выполнение условия

$$a_{00}a_{11} - a_{01}a_{10} \neq 0.$$

Предположим теперь, что в момент времени $t = t' = 0$ из точки $x = x' = y = y' = z = z' = 0$ выпущена порция света в положительном направлении оси x. Тогда в любой момент времени t координаты этой порции света в старой системе координат будут $x = ct$, $y = 0$, $z = 0$, где c – скорость света. В новой системе координат свет также движется со скоростью c, так что положение светового пятна дается выражениями $x' = \alpha ct'$, $y' = 0$, $z' = 0$, $\alpha = \pm 1$. Подставляя эти соотношения в (5), получаем

$$a_{10} + ca_{11} = \alpha(ca_{00} + c^2a_{01}).$$

Если свет выпущен в отрицательном направлении оси x, то положение светового пятна на осях x и x' определяется формулами $x = -ct$, $x' = -\alpha_1 ct'$, $\alpha_1 = \pm 1$, что дает

$$a_{10} - ca_{11} = \alpha_1(-ca_{00} + c^2a_{01}).$$

Решая совместно эти два уравнения, получаем

$$a_{10} = \frac{1}{2}(\alpha - \alpha_1)ca_{00} + \frac{1}{2}(\alpha + \alpha_1)c^2a_{01},$$

$$a_{11} = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha_1)a_{00} + \frac{1}{2}(\alpha - \alpha_1)ca_{01}.$$

Возможны два случая: $\alpha_1 = \alpha$ и $\alpha_1 = -\alpha$. Во втором случае имеем $a_{10} = \alpha ca_{00}$, $a_{11} = \alpha ca_{01}$. При этом обратного преобразования не существует, так что случай $\alpha_1 = -\alpha$ должен быть отброшен. В случае $\alpha_1 = \alpha$ получаем $a_{10} = \alpha c^2a_{01}$, $a_{11} = \alpha ca_{01}$. Итак, в общем случае преобразования содержат два произвольных параметра a_{00} и a_{01}, а также параметр $\alpha = \pm 1$. Вместо параметров a_{00} и a_{01} удобно ввести другие независимые параметры u и λ: $a_{00} = \lambda/\sqrt{1-(u/c)^2}$, $a_{01} = -\lambda u/c^2\sqrt{1-(u/c)^2}$, так что преобразования принимают вид

$$t' = \lambda(t - ux/c^2)/\sqrt{1-(u/c)^2},$$

$$x' = \alpha\lambda(x - ut)/\sqrt{1-(u/c)^2}.$$

Рассмотрим координаты начала новой системы $x'y'z'$ (то есть точки $x' = y' = z' = 0$) в старой системе координат: $x = ut$, $y = z = 0$. Таким образом, u – это скорость, с которой новая система координат $x'y'z'$ движется относительно старой системы координат xyz вдоль оси x. Применение последовательно двух преобразований $x_\mu \longrightarrow x'_\mu$ с параметрами u_1, λ_1, α_1 и $x'_\mu \longrightarrow x''_\mu$ с параметрами u_2, λ_2, α_2 дает при такой интерпретации систему $x''y''z''$, которая движется относительно системы $x'y'z'$ со скоростью u_2 вдоль оси x', которая, в свою очередь, движется относительно системы xyz со скоростью u_1 вдоль оси x. Естественно предположить, что полное преобразование $x_\mu \longrightarrow x''_\mu$ описывает движение системы $x''y''z''$ относительно системы xyz вдоль оси x с некоторой скоростью u_3. Действительно, явное вычисление дает

$$t'' = \lambda_3(t - u_3x/c^2)/\sqrt{1-(u_3/c)^2},$$

$$x'' = \alpha_3\lambda_3(x - u_3t)/\sqrt{1-(u_3/c)^2},$$

где

$$\lambda_3 = \lambda_1\lambda_2\frac{1 + \alpha_1\dfrac{u_1u_2}{c^2}}{\left|1 + \alpha_1\dfrac{u_1u_2}{c^2}\right|}, \quad \alpha_3 = \alpha_1\alpha_2, \quad u_3 = \frac{u_1 + \alpha_1u_2}{1 + \alpha_1\dfrac{u_1u_2}{c^2}}. \quad (6)$$

Таким образом, интерпретация параметра u как относительной скорости движения двух пространственных систем координат является самосогласованной, а формула (6) дает правило сложения скоростей (заменяющее правило $u_3 = u_1 + \alpha_1u_2$, справедливое при малых скоростях). Заметим, что если u_1 или u_2 равны по модулю скорости света c, тогда модуль u_3 также равен скорости света (конечно, это свойство было положено в основу вывода преобразований). Кроме того, если u_1 и u_2 по модулю меньше c, тогда и $|u_3| < c$. Параметр λ отвечает за масштабное преобразование координат и времени. Мы ограничимся случаем преобразований, которые сохраняют длины векторов, если пространственные координаты x', y', z' выражаются только через пространственные координаты x, y, z. Это означает, что $\lambda = \pm 1$.

Итак, мы получили, что преобразования, которые оставляют скорость света одинаковой в разных системах координат, включают сдвиги пространственных координат и времени, вращения и отражения пространственных координат, отражение времени $t \longrightarrow t' = -t$, а также преобразования типа

$$t' = \frac{t - \dfrac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{u}{c}\right)^2}}, \qquad x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{u}{c}\right)^2}}, \qquad (7)$$

которые называются собственными преобразованиями Лоренца. Полная совокупность указанных преобразований называется преобразованиями Пуанкаре. Нетрудно видеть, что преобразования Пуанкаре оставляют инвариантным “4-мерное” расстояние Δs:

$$(\Delta s)^2 = (t_2 - t_1)^2c^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2,$$

называемое интервалом между двумя событиями (точками в 4-мерном пространстве) $x_{2\mu} = (t_2, x_2, y_2, z_2)$ и $x_{1\mu} = (t_1, x_1, y_1, z_1)$, а не только его нулевое значение:

$$(\Delta s')^2 = (\Delta s)^2.$$

Снова можно поставить вопрос, каков наиболее общий вид преобразований, оставляющих инвариантным интервал. И снова ответ состоит в том, что и в общем случае преобразования исчерпываются преобразованиями Пуанкаре, то есть сдвигами, отражениями, вращениями и собственными преобразованиями Лоренца типа (7). В случае линейных преобразований это можно доказать с помощью рассуждений, аналогичных проведенным в предыдущем разделе. Для нелинейных преобразований доказательство требует знания основ дифференциального исчисления в частных производных.

3.2. Симметрия и энергия–импульс

Какими могут быть физические характеристики тела, которые зависят только от скорости тела и “хорошо” ведут себя при преобразованиях Пуанкаре? Под этим мы будем понимать следующее. Пусть пространственные координаты и время преобразуются по закону (4). При этом скорость $\upsilon_i = \Delta x_i / \Delta t$, $i = 1, 2, 3$, преобразуется по закону

$$\upsilon_i' = \frac{\Delta x_i'}{\Delta t'} = \left(a_{i0} + \sum_{k=1}^{3} a_{ik}\upsilon_k\right) \Big/ \left(a_{00} + \sum_{k=1}^{3} a_{0k}\upsilon_k\right).$$

Мы будем рассматривать величины, которые либо инвариантны относительно преобразований Пуанкаре (такие величины мы будем обозначать $M(\mathbf{v})$): $M(\mathbf{v}') = M(\mathbf{v})$, либо преобразуются как Δx_μ (такие величины мы будем обозначать $p_\mu(\mathbf{v})$):

$$p_\mu(\mathbf{v}') = \sum_{\nu=0}^{3} a_{\mu\nu} p_\nu(\mathbf{v}). \qquad (8)$$

Инварианты. Так как $M(\mathbf{v})$ инвариантна относительно вращений, должно быть $M(\mathbf{v}) = m(\upsilon^2)$. Рассмотрим теперь специальное преобразование Пуанкаре – собственное преобразование Лоренца (7) и будем считать, что $\mathbf{v} = (\upsilon, 0, 0)$, $|\upsilon| < c$, $|u| < c$. Тогда $\mathbf{v}' = (\upsilon', 0, 0)$, $\upsilon' = (\upsilon - u)/(1 - u\upsilon/c^2)$, а условие инвариантности принимает вид $m[(\upsilon - u)^2/(1 - u\upsilon/c^2)^2] = m(\upsilon^2)$. Полагая в этом соотношении $u = \upsilon$, получаем $M(\mathbf{v}) = m(\upsilon^2) = m(0) = \text{const}$. Таким образом, пуанкаре-инвариантными характеристиками движущегося тела, которые могли бы зависеть только от его скорости, являются константы, такие, как масса (покоя) или заряд.

Величины типа $p_\mu(\mathbf{v})$. Формула (8) показывает, что при вращениях p_0 является инвариантом и p_i преобразуются как компоненты скорости. В предыдущем пункте было показано, что они должны иметь вид

$$p_0(\mathbf{v}) = \frac{E(\upsilon^2)}{c^2}, \qquad p_i(\mathbf{v}) = f(\upsilon^2)\upsilon_i,$$

числовой множитель $1/c^2$ выделен для удобства. Рассмотрим следствия трансформационных свойств p_μ относительно собственных преобразований Лоренца (7):

$$\frac{1}{c^2}E\left[\left(\frac{\upsilon - u}{1 - \frac{u\upsilon}{c^2}}\right)^2\right] = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}}\left[\frac{1}{c^2}E(\upsilon^2) - \frac{u\upsilon}{c^2}f(\upsilon^2)\right],$$

$$\frac{\upsilon - u}{1 - \frac{u\upsilon}{c^2}} f\left[\left(\frac{\upsilon - u}{1 - \frac{u\upsilon}{c^2}}\right)^2\right] = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}}\left[-\frac{u}{c^2}E(\upsilon^2) + \upsilon f(\upsilon^2)\right].$$

Полагая $u = \upsilon$, из второго уравнения находим $E(\upsilon^2) = c^2 f(\upsilon^2)$, а затем из первого: $f(\upsilon^2) = f(0)/\sqrt{1 - (u/c)^2}$. Полагая $f(0) = m$, получаем окончательно

$$p_\mu(\mathbf{v}) = \left(\frac{E}{c^2}, \mathbf{p}\right), \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}}, \quad \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}}.$$

Компонентами p_μ являются релятивистские полная энергия и импульс тела. Его квадрат “релятивистской длины” p^2: $p^2 \equiv p_0^2 c^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2$ должен быть пуанкаре-инвариантом, а значит, не должен зависеть от скорости. Явное вычисление подтверждает это: $p^2 = m^2c^2$. Таким образом, соображения пуанкаре-симметрии налагают гораздо более сильные ограничения на возможный выбор физических характеристик движущегося тела, чем это было в случае чисто пространственных симметрий.

Мы надеемся, что приведенные примеры наглядно демонстрируют, как несколько, казалось бы, простых предположений, в данном случае о свойствах пространства и времени, приводят к далеко идущим последствиям и как эти следствия можно выводить.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Фейнман Р.* Характер физических законов. М.: Наука, 1987.
2. *Барашенков В.С.* Кварки, протоны, Вселенная. М.: Знание, 1987.
3. *Гарднер М.* Теория относительности для миллионов. М.: Атомиздат, 1979.

* * *

Игорь Викторович Тютин, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Отделения теоретической физики им. И.Е. Тамма Физического института им. П.Н. Лебедева Российской Академии наук, занимается вопросами квантовой теории калибровочных полей.