КАК ДОКАЗЫВАТЬ ТРАНСЦЕНДЕНТНОСТЬ ЧИСЕЛ

И. Б. СИМОНЕНКО
Ростовский государственный университет, Ростов-на-Дону

HOW THE NUMBER TRANSCENDENCE IS PROVED

I. B. SIMONENKO

In form that available for senior high school students the transcendence of the number e and of sums of some infinite special series is explained.

В доступной для учащихся старших классов форме излагается доказательство трансцендентности числа е и сумм некоторых специальных рядов.

ВВЕДЕНИЕ

Еще в глубокой древности, хотя бы в связи с теоремой Пифагора (VI в. до н. э.), люди поняли, что одних рациональных чисел мало для описания соотношений между двумя реально существующими величинами одинаковой природы. Так, длина b диагонали квадрата связана с длиной a его стороны соотношением $b^2 = 2a^2$, вследствие чего $b = \sqrt{2}a$ и сторона квадрата несоизмерима с его диагональю, откуда следует, что $\sqrt{2}$ не является рациональным числом. Число $\sqrt{2}$ хоть и не является рациональным, однако удовлетворяет уравнению $x^2 - 2 = 0$ и потому принадлежит множеству алгебраических чисел (определение алгебраического числа см. в разделе 1).

Столь же давно было введено число π – отношение длины окружности к ее диаметру и возникла задача о возможности с помощью циркуля и линейки построить квадрат, обладающий той же площадью, что и заданный круг. Это так называемая задача о квадратуре круга. Внимательно проанализировав построение при помощи циркуля и линейки (см. по этому поводу [1, с. 185]), можно убедиться, что если оно возможно, то число π является алгебраическим. Поэтому естественно возникает вопрос о том, является ли число π таковым. Ответ на этот вопрос, заданный еще в глубокой древности, дал лишь в конце прошлого века в 1882 году Ф. Линдеман. Он доказал, что π не является алгебраическим числом, то есть является трансцендентным, и, следовательно, задача о квадратуре круга неразрешима.

Это замечательное открытие стало возможным благодаря трудам по крайней мере еще двух великих математиков: Ф. Линдеман использовал формулу Эйлера $e^{i\pi} = -1$, где i – мнимая единица (1743 год), и прием, которым пользовался Ш. Эрмит при доказательстве трансцендентности числа $e \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{n \to +\infty} (1 + 1/n)^n$ (1873 год). Этим исследованиям Ш. Эрмита и Ф. Линдемана предшествовали работы Ж. Лиувилля (1844 год), в которых он показал, что суммы рядов определенного типа являются трансцендентными числами. Это были первые примеры трансцендентных чисел. Краткая историческая справка по этому вопросу содержится, например, в статье «Трансцендентное число» из [2] и в [3, приложение 1, с. 334].

Итак, к концу XIX века было известно, что числа e и π являются трансцендентными. Более того, Ф. Линдеман доказал, что сумма $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k e^{\beta_k}$ является трансцендентным числом, если α_k, β_k – алгебраические числа, удовлетворяющие условиям: хотя бы одно α_k неравно нулю; все β_k неравны нулю и попарно различны. Заметим, что отсюда вытекает трансцендентность числа π, так как если бы π было алгебраическим, то 1 была бы трансцендентным числом.

Вместе с тем, однако, стало ясно, что существуют более глубокие причины трансцендентности, обнаружив которые можно было бы существенно расширить класс известных трансцендентных чисел и получить инструмент, полезный для разрешения многих других математических проблем. Это побудило Д. Гильберта [4] (одного их самых выдающихся математиков, работавших на стыке XIX и XX веков) внести эту задачу (проблема № 7) в свой известный список из 23 важнейших проблем, которые, по его мнению, должны были быть решены в XX веке. Этот список был оглашен на Втором международном математическом конгрессе в Париже в августе 1900 года. Последующее (ныне это уже прошедшее) развитие математической науки подтвердило правильность сделанного Гильбертом выбора.

Проблема № 7 не имеет столь резко очерченных границ, как, например, проблема № 1, касающаяся континуум-гипотезы, поэтому нельзя сказать, что эта проблема закрыта. И в настоящее время исследования в этой увлекательной области математики продолжаются. Читателю, желающему всерьез познакомиться с ней, мы рекомендуем следующую литературу: [3, с. 334–381; 5, с. 546–552].

Итак, легкое чтение окончено. Все сказанное выше должно, как кажется автору, пробудить у читателя интерес к методам, которые позволяют доказывать трансцендентность. Автор статьи попытался помочь читателю овладеть некоторыми из них.

Далее в статье сформулированы (раздел 1) и доказаны (разделы 2–4) три теоремы. Первая – об иррациональности, вторая – о трансцендентности сумм некоторых рядов, третья – о трансцендентности числа e. Легче всего доказывается первая теорема. Автор думает, что ее доказательство (раздел 2) может понять каждый учащийся старших классов. Доказательство второй теоремы (раздел 3) несколько сложнее. В основу его положены идеи Ж. Лиувилля. Третья теорема доказана, как мы уже говорили, Ш. Эрмитом. Доказательство ее неоднократно совершенствовалось. Этим занимались, например, Д. Гильберт и Ф. Клейн [3, с. 334]. Автору представляется, что ему удалось сделать доказательство этой теоремы еще более прозрачным (раздел 4). Пожалуй, оно может быть понятно хорошо подготовленным учащимся средней школы.

1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{A}$, $\mathbb{T}$ – множества натуральных, целых, рациональных, вещественных, иррациональных, алгебраических и трансцендентных чисел соответственно. Будем считать, что натуральный ряд $\mathbb{N}$ начинается с единицы (иногда, хотя и редко, первым натуральным числом считается нуль).

Напомним, что рациональное число – это число, представимое в виде $\frac{p}{q}$, где $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$. Множество вещественных чисел, как бы оно ни было определено (есть много по существу равносильных способов определения этого множества), получается пополнением множества $\mathbb{Q}$, так что имеет место следующее положение, которым мы будем пользоваться далее.

Предложение 1. *Любая ограниченная монотонная последовательность вещественных чисел имеет конечный предел в* $\mathbb{R}$.

Иррациональное число – это такое вещественное число, которое не является рациональным, то есть $\mathbb{I} = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

Остановимся на определении алгебраического числа. Вещественное число r называется алгебраическим, если существуют такое натуральное число m и набор целых чисел $a_0, a_1, \ldots, a_m$, что: 1) $a_0 \neq 0$ и 2) r удовлетворяет уравнению

$$a_0 r^m + a_1 r^{m-1} + \ldots + a_m = 0. \tag{40}$$

Заметим, что рациональное число является алгебраическим, так как если $r = p/q$ ($p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$), то r удовлетворяет уравнению $qr - p = 0$.

Трансцендентным числом называется вещественное число, отличное от алгебраического, то есть $\mathbb{T} = \mathbb{R} \backslash \mathbb{A}$.

Теорема 1. *Пусть c_k ($k \in \mathbb{N}$) – последовательность натуральных чисел, удовлетворяющая следующим условиям:*

а) *для каждого $k \in \mathbb{N}$ число c_{k+1} делится на c_k;*

б) *последовательность c_k / c_{k+1} стремится к нулю при $k \longrightarrow +\infty$.*

Пусть r – число, определяемое равенством

$$r = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{c_k}. \tag{41}$$

Тогда $r \in \mathbb{I}$.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы* 1 *и, кроме того, следующее условие*:

в) *для каждого* $n \in \mathbb{N}$ *последовательность* $(c_k)^n/c_{k+1}$ *стремится к нулю при* $k \longrightarrow +\infty$.

Тогда $r \in \mathbb{T}$.

Заметим, что на основании предложения 1 рассматриваемый ряд сходится, так как последовательность частичных сумм этого ряда возрастает и ограничена.

Пример 1. Последовательности $c_k = 2^{k^2}$ и $c_k = k! \overset{\text{def}}{=} 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$ удовлетворяют условиям а), б). Таким образом, на основании теоремы 1 сумма $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} 2^{-k^2}$ и число e $\left(\text{вспомним, что имеет место формула } e = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\right)$ являются иррациональными числами.

Пример 2. Последовательность $c_k = 2^{k!}$ удовлетворяет условиям а)–в). Поэтому сумма $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} 2^{-k!}$ является трансцендентным числом.

Теорема 3. *Число e является трансцендентным.*

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Доказательство проведем от противного. Предположим, что $r = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$. Пусть r_k, Δ_k – последовательности частичных сумм и остатков ряда (2), то есть

$$r_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{c_i}, \qquad \Delta_k = r - r_k. \tag{42}$$

Отметим, что для всех k $\Delta_k > 0$. Более того, в силу условия а) для всех k

$$\Delta_k \geq \frac{1}{qc_k}. \tag{43}$$

Итак, предположив, что r – рациональное число, мы получили для последовательности Δ_k оценку (4) – оценку снизу. Быстрая сходимость ряда (2) позволит нам получить для Δ_k оценку сверху, противоречащую оценке (4). Займемся этим.

В силу условия б) существует такое $k_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $k > k_0$ $\frac{c_k}{c_{k+1}} < \frac{1}{2}$. Пусть k_0 – такое число и $k > k_0$. Тогда

$$\Delta_k = \sum_{i=k+1}^{+\infty} \frac{1}{c_i} \leq \frac{1}{c_{k+1}} \sum_{i=k+1}^{+\infty} \frac{c_{k+1}}{c_i} \leq \frac{1}{c_{k+1}} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{2}{c_{k+1}},$$

то есть

$$\Delta_k \leq \frac{2}{c_{k+1}}. \tag{44}$$

Таким образом, для всех $k > k_0$ справедливы оценки $\frac{1}{qc_k} \leq \Delta_k \leq \frac{2}{c_{k+1}}$, то есть $\frac{c_k}{c_{k+1}} \geq \frac{1}{2q}$, что противоречит условию б). Теорема 1 доказана.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Пусть c_k – последовательность, удовлетворяющая условиям а)–в); r – число, определяемое равенством (2). На основании теоремы 1 r – иррациональное число. Докажем, что, более того, r трансцендентно. Доказательство также проведем от противного. Предположим, что r не является трансцендентным, то есть r – алгебраическое число. Тогда существует такое натуральное число m и такой набор целых чисел a_0, a_1, ..., a_m, что $a_0 \neq 0$ и выполняется равенство (1). Пусть a_0, a_1, ..., a_m – такой набор. Пусть P – полином, определенный на $\mathbb{R}$ равенством $P(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m$; a, b – такие числа, что $r \in (a, b)$ $(\overset{\text{def}}{=} \{x | \, a < x < b\})$ и во множестве $[a, b]$ $(\overset{\text{def}}{=} \{x | \, a \leq x \leq b\})$ r – единственный корень полинома P; r_k, Δ_k определены равенствами (3); $k_0 \in \mathbb{N}$ удовлетворяет условиям: для каждого $k > k_0$ $r_k \in [a, b]$ и $\frac{c_k}{c_{k+1}} < \frac{1}{2}$. В дальнейшем мы будем считать, что $k > k_0$. Как и при доказательстве теоремы 1, мы, руководствуясь различными соображениями, получим для Δ_k две противоречащие друг другу оценки: одну сверху, другую снизу. Оценка сверху, собственно, уже получена. Это оценка (5). Теперь проведем оценку Δ_k снизу.

Так как r_k не является корнем полинома P и r_k можно представить в виде $r_k = \frac{p}{c_k}$, где $p \in \mathbb{N}$, справедлива оценка $|P(r_k)| \geq \frac{1}{(c_k)^m}$. Пусть $M = \max\limits_{x \in [a, b]} |P'(x)|$. Тогда

$$\frac{1}{(c_k)^m} \leq |P(r_k)| = |P(r_k) - P(r)| = |P'(\xi)||\Delta_k|, \text{ где } \xi \in [a, b].$$

Таким образом, имеет место оценка

$$|\Delta_k| \geq \frac{1}{M(c_k)^m}. \tag{45}$$

Учитывая оценки (5), (6), имеем $\frac{1}{M(c_k)^m} \leq \frac{2}{c_{k+1}}$, откуда вытекает неравенство $\frac{(c_k)^m}{c_{k+1}} \geq \frac{1}{2M}$, что противоречит условию в) теоремы 2.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3

Доказательство и этой теоремы проведем от противного. Предположим, что $e \in \mathbb{A}$. Тогда существуют натуральное число m и набор целых чисел $a_0, a_1, \ldots, a_m$, такие, что $a_0 \neq 0$ и $a_0 + a_1 e + \ldots + a_m e^m = 0$. Пусть m; a_0, $a_1, \ldots, a_m$ – такие числа. В дальнейшем нам понадобится следующее вспомогательное предложение.

Лемма 1. *Существуют функции* $f, f_1^+, \ldots, f_m^+, f_1^-, \ldots$ $\ldots, f_m^-$, *определенные на* $\mathbb{N}$ *и удовлетворяющие следующим условиям*:

1) *для достаточно больших простых* p $f(p)$ – *целое, не делящееся на* p *число.*

Для каждого $k = 1, 2, \ldots, m$:

2) $f = f_k^+ + f_k^-$;

3) *для каждого* $p \in \mathbb{N}$ $e^k f_k^+(p)$ – *целое, делящееся на* p *число*;

4) $e^k f_k^-(p) \longrightarrow 0$, *когда* $p \longrightarrow +\infty$.

Доказательство этого положения мы проведем несколько позже, а сейчас, предполагая, что лемма 1 справедлива, докажем трансцендентность числа e.

Нам понадобится еще

Предложение 2. *Пусть* $p \in \mathbb{N}$ – *простое число*; q_1, $q_2, \ldots, q_n \in \mathbb{N}$ *и каждое из* q_k *не делится на* p. *Тогда произведение* $q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n$ *также не делится на* p.

Это одно из первых основных положений теории чисел.

Итак, пусть лемма 1 справедлива и $f, f_1^+, \ldots, f_m^+$, $f_1^-, \ldots, f_m^-$, – функции, удовлетворяющие условиям леммы 1. Тогда для каждого $p \in \mathbb{N}$

$$I_0(p) + I^+(p) + I^-(p) = 0,$$

где

$$I_0(p) = f(p)a_0,$$

$$I^+(p) = a_1 e f_1^+(p) + a_2 e^2 f_2^+(p) + \ldots + a_m e^m f_m^+(p),$$

$$I^-(p) = a_1 e f_1^-(p) + a_2 e^2 f_2^-(p) + \ldots + a_m e^m f_m^-(p).$$

Теперь заметим, что в соответствии с условием 3 $I^+(p)$ делится на p при любом $p \in \mathbb{N}$. Пусть n – такое натуральное число, что для каждого простого числа $p > n$ $I_0(p)$ не делится на p. Оно существует в силу условия 1 и предложения 2. Тогда для каждого простого $p > n$ $|I_0(p) + I^+(p)| \geq 1$. Далее в силу условия 4 существует такое простое число $p > n$, что $|I^-(p)| < 1/2$. Для таких p $|I_0(p) + I^+(p) + I^-(p)| \geq 1/2$. Полученное противоречие доказывает теорему 3.

Итак, нам осталось доказать лемму 1. Для ее доказательства воспользуемся следующим фактом.

Предложение 3. *Пусть* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Тогда имеет место равенство* $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!$.

Это равенство можно получить путем интегрирования по частям.

Пусть функции $f, f_1^+, \ldots, f_m^+, f_1^-, \ldots, f_m^-$ определены на $\mathbb{N}$ следующим образом:

$$f(p) = \frac{1}{(p-1)!}\int_0^{+\infty} \{x^{p-1}[\varphi(x)]^p\} e^{-x} dx,$$

$$f_k^+(p) = \frac{1}{(p-1)!}\int_k^{+\infty} x^{p-1}[\varphi(x)]^p e^{-x} dx, \qquad k = 1, 2, \ldots, m,$$

$$f_k^-(p) = \frac{1}{(p-1)!}\int_0^{k} x^{p-1}[\varphi(x)]^p e^{-x} dx, \qquad k = 1, 2, \ldots, m,$$

где

$$\varphi(x) = (x-1) \cdot \ldots \cdot (x-m).$$

Проверим, удовлетворяют ли эти функции условиям леммы 1.

Сначала проверим условие 1. С этой целью заметим, что выражение в фигурных скобках в формуле для функции f представляет собой полином с целочисленными коэффициентами с первым ненулевым членом $\alpha(x) \overset{\text{def}}{=} (-1)^m (m!)^p x^{p-1}$. Поэтому в силу предложения 3 имеет место равенство

$$\int_0^{+\infty} \alpha(x) e^{-x} dx = (-1)^m (m!)^p (p-1)!.$$

Интегралы от остальных членов этого полинома, умноженных на e^{-x}, снова в силу предложения 3 делятся на $p!$. Таким образом, имеем $f(p) = (-1)^m (m!)^p + lp$, где l – целое число. Если $p > m$, то каждое из чисел $1, 2, \ldots, m$ не делится на p, а потому в силу предложения 2 и $m!$ не делится на p. По тем же причинам и $(m!)^p$ не делится на p. Итак, условие 1 выполняется.

Условие 2 выполняется в силу определения f, f_k^+, f_k^-.

Теперь проверим условие 3. Пусть $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Тогда

$$e^k f_k^+(p) = \frac{1}{(p-1)!}\int_k^{+\infty} x^{p-1}[(x-1) \cdot \ldots \cdot (x-m)]^p e^{k-x} dx =$$

$$= \frac{1}{(p-1)!}\int_0^{+\infty} \{(t+k)^{p-1}[(t+k-1) \cdot \ldots \cdot (t+k-m)^p]\} e^{-t} dt.$$

Среди множителей в квадратных скобках последнего подынтегрального выражения имеется и t. Таким образом, под знаком интеграла в фигурных скобках мы имеем полином с целочисленными коэффициентами. Первый ненулевой член этого полинома имеет степень p и потому в силу предложения 3 условие 3 выполняется.

Проверим, наконец, условие 4. Пусть $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ и $c = \max\limits_{x \in [0, k]} |\varphi(x)|$. Тогда для каждого $p \in \mathbb{N}$

$$\left|e^k f_k^-(p)\right| \le \frac{1}{(p-1)!} \int_0^k x^{p-1} |\varphi(x)|^p e^{k-x} dx \le \phi(p) \overset{\text{def}}{=} \frac{e^k (kc)^p}{(p-1)!}.$$

Докажем, что $\phi(p) \longrightarrow 0$ при $p \longrightarrow +\infty$. Для этого заметим, что $\psi(p) \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\phi(p+1)}{\phi(p)} = \dfrac{kc}{p} \longrightarrow 0$ при $p \longrightarrow +\infty$. Воспользовавшись этим, выберем $p_0 \in \mathbb{N}$ так, чтобы для каждого $p \ge p_0$ выполнялось неравенство $\psi(p) < 1/2$. Тогда при $p > p_0$ $\phi(p) \le 2^{p_0 - p} \phi(p_0)$. Откуда и следует, что $\phi(p) \longrightarrow 0$ при $p \longrightarrow +\infty$, то есть условие 4 выполняется.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Постников М.М.* Теория Галуа. М.: Физматгиз, 1962. 218 с.

2. Математическая энциклопедия. М.: Сов. энциклопедия, 1985. Т. 5. 1248 с.

3. *Клейн Ф.* Элементарная математика с точки зрения высшей. М.: Физматгиз, 1987. 432 с.

4. *Рид К.* Гильберт. М.: Физматгиз, 1977. 308 с.

5. *Ленг С.* Алгебра. М.: Мир, 1968. 564 с.

Рецензент статьи В.А. Ильин

* * *

Игорь Борисович Симоненко, доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой алгебры и дискретной математики Ростовского государственного университета, заслуженный деятель науки РФ. Область научных интересов – краевые задачи теории функций комплексного переменного, дифференциальные и псевдодифференциальные уравнения, математическая физика. Автор 154 статей и четырех монографий.